ランダムな図形の物理的表現(基研短期研究計画「形の物理学」,研究会報告)

森, 肇

てはSとPの合併位相τ_{SP}が与られる。実際には，Pには，あずまや，軒先などの境界がさだかでない生活領域が該当する。Rは，Wによって＜盤＞からとりはずされる。この場合ふたつの種類があって，ひとつは閉鎖性の高い部屋，あるいはその集合で，密着位相τ_0やこれに準ずる粗い位相τ_Nが与られ，もうひとつは，＜盤＞と同じような構造をもつ複合体$R_{complex}$である。$R_{complex}$によって，＜盤＞は一種の入れ子構造をもつ。

こうして図形に位相を導入し，建築空間の組み立てを類型化する研究を現在すすめている。

以上，類似した研究をすすめている方々の御指導を仰ぎたいと願い，研究中の手法を簡単に紹介した。

ランダムな図形の物理的表現

九大・理　森　　肇

ランダムな形をもつ構造としてよく知られているものに

1）ブラウン曲線，溶液中の高分子鎖

2）海岸線，島，山岳

3）浸透(percolation)のクラスター，二次相転移の臨界点近傍のクラスター

4）発達した乱流の渦糸

5）散逸力学系の奇妙なアトラクタ

等がある。これらは，直線，正多面体，円錘等を理想化された極限図形とする通常の幾何学とは全く異る種類の図形に属する。これらランダムな構造の幾何学的特徴を捉えるものとして，ここでは，2つの巨視的指数

a）次元D（相似次元，Hausdorff次元）

b）拡りの指数ν

を議論した。ランダムな構造の特徴として，次元Dは非整数となる。このことは，1)，2)，3)の例については比較的によく知られている。[1,2] 4)，5)の例についても，非整数の次元Dが有用な物理量であることが判明してきた。[3] 拡りの指数νは，溶液中の高分子鎖の拡りを特徴ずけるものとしてよく知られているものである[4]が，他の例でも，特に，乱流の異常拡散（渦糸の拡りの時間的異常増加）や奇妙なアトラクタ上の拡散過程を特徴ずけるのに有用な物理量で

あることが判明してきた。[5]

図形または集合Sの次元Dは，Sを小さな直径ℓの球$N(\ell)$個で覆えば

$$D=\lim_{\ell\to 0}\log N(\ell)/\log[1/\ell] \tag{1}$$

で与えられる。ただしここで，諸々の覆い方の中で，球の数$N(\ell)$が最も小さなものをとる。

非整数の次元の明快な例として海岸線を考えよう。海岸線の長さは測量の単位に大きく依存する。測量の単位を小さくして，岬や湾の出入を考慮すれば長くなる。岩の凹凸まで入れれば更に長くなる。つまり，測量の単位に依存しない長さを定義することが不可能である。このような海岸線をどのように捉えたらよいか？　いま測量の単位をℓ_0，$r\ell_0$，……$r^n\ell_0\equiv\ell_n$と比率rで小さくしていく。そのときの海岸線の長さをL，L_1，……L_nとしよう。測量の単位を比率rで小さくすると長さがrN倍になる（自己相似）とすれば

$$L_n=(rN)^nL,\quad (rN>1) \tag{2}$$

$N=r^{-\hat{D}}$とおけば$L_n=r^{(1-\hat{D})n}L$。したがって

$$\log L_n=-(\hat{D}-1)\ \log\ell_n+C \tag{3}$$

ここで$C=\log(L/\ell_0^{1-\hat{D}})$は定数である。つまり，海岸線の長さの対数と測量の単位の対数とは直線になる。その傾きを$\tan\theta$とすれば，海岸線は指数

$$\hat{D}=1+\tan\theta \tag{4}$$

によって特徴ずけられることとなる。事実多くの海岸線の特性がこのような$\hat{D}$によって捉えられることがRichardson (1961) によって示された。[1] $\hat{D}$は海岸線の次元を表わす。実際，測量の単位ℓ_nのときの線分の個数は$N_n=N^nN_0$とかけるから，(1) により

$$D=\lim_{\ell\to 0}\log(N^nN_0)/\log(1/r^n\ell_0),$$

$$=\log N/\log(1/r)=\hat{D} \tag{5}$$

となる。なお，$N>1/r>\sqrt{N}$から$1<D<2$がえられる。

(2) において，長さの伸び率rNがステップnに依らないとした。これは自己相似性に他ならない。Dはこのような自己相似なプロセスを特徴ずけるものであり，相似次元とよばれる。

次の稀薄溶液中の高分子を考えよう。N個のセグメント（モノマー）からなる高分子の両端の距離Rの自乗平均は，Nが十分に大きいとき，

$$<R^2>=CN^{2\nu}\ell^2 \tag{6}$$

とかける。ここでℓは一個のセグメントの長さであり，CはNおよびℓに依らない定数である。高分子はN個のセグメントのランダムな鎖と考えられる。完全にランダムなときには$\nu=1/2$となり，Rの確率分布はガウス分布となる。現実の高分子では，Floryによれば，$\nu=3/5$となり，Rの確率分布はガウス分布からずれる[4]。

いま

$$\ell \to \ell' = r\ell\,,\quad (r \to 0) \tag{7}$$

$$N \to N' = r^{-\hat{D}} N \tag{8}$$

のように，セグメントの長さℓを小さくし，その数Nを大きくする。ただしその拡り

$$< R^2 > \to r^{-2[\nu\hat{D}-1]} < R^2 > \tag{9}$$

は一定に保つ。つまり$\hat{D}=1/\nu$とする。その極限$r\to 0$において，高分子鎖はランダムな曲線となるが，その曲線の次元は，(1)により，$D=\hat{D}=1/\nu$によって与えられる。したがって，高分子鎖は，巨視的極限において，$1/\nu$を次元とするランダムな曲線といえる。Floryの値$\nu=3/5$を使えば，高分子鎖は$D=5/3$次元の曲線というわけである。

液体中に浮ぶ微粒子の画くブラウン曲線は，完全にランダムな曲線であり，$\nu=1/2$，$D=2$となる。つまり，2次元の曲線である。

なお，$D=1/\nu$の関係は，拡り(q)を不変にするスケーリングの場合にかぎる。たとえば，発達した乱流中の渦糸に対しては，この関係は成立しない。

相似次元Dおよび拡りの指数νは，もっと複雑な図形，たとえば，冒頭にのべた3)のクラスターを特徴ずけるのに有用であるだけでなく，4)および5)のような，ランダムな動的構造を捉えるのにも有用である。発達した乱流は大小様々の直径をもった渦糸からなる。渦糸はランダムに曲折し，高分子鎖のように，多数のblobセグメントが連なったランダムな鎖と考えてよい。このような渦糸は，時間と共に，その直径が小さくなると同時に長さが伸びる。直径が非常に小さくなると，粘性のために，渦は消失する。いま$t=0$で，このようなblobの一つをとり，時刻tにおけるその両端間の距離を$R(t)$としよう。そのとき，$R(t)$の自乗平均の時間変化は

$$< R^2(t) > \propto \frac{1}{[1-(t/t_\infty)]^{2\eta}} \tag{10}$$

とかける。ここでt_∞は渦糸の寿命であり，指数ηは

$$\eta = 3[D\nu - 1]/(5 - D) \tag{11}$$

で与えられる。Dはランダムに曲折した渦糸の次元であり，理論的に$D \simeq 8/3$となる[6] 拡りの指数νは$\nu = 1/(D-1)$からきまると考えられる。そのとき$\nu \simeq 3/5$となり，奇しくも，高分子鎖の場合と同じである。ηは$\eta \simeq 0.77$となる。(10)は，発達した乱流の異常拡散を端的に表わす。つまり，渦糸の空間的拡りは，$t \to t_\infty$のとき急速に拡がる。これは，渦糸が細くなる程急速に伸びることに由来する。この式はレイノルズ数が大きいとき慣性領域で成立する式であり，渦糸の直径が散逸の特性長ℓ_dと同じ程度になると，粘性を考慮して変形しなければならない[5]

以上のように，ランダムな曲線の形を捉えるには，Dとνで十分と思われる。しかし，クラスターやLorenzシートなど，高次元のランダムな構造を捉えるには，Dとνだけでは不十分であり，何か別の形の変数を持ってこねばならないと思われる。

参 考 文 献

1) B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance and Dimension* (Freeman, San Francisco, 1977).
2) D. Stauffer, Phys. Reports **54** (1979) 1–74.
3) H. Mori & H. Fujisaka, Prog. Theor. Phys. **63** (1980) 1931.
4) P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics* (Cornell Univ. Press, Ithaca, 1979).
5) H. Mori, Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 69 (1980).
6) H. Fujisaka, & H. Mori, Prog. Theor. Phys. **62** (1979) 54.